CONCOURS 1991

Régime Economique

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

durée 4 heures.

coefficient : 5.

matériel autorisé : UNE calculatrice personnelle.
matériel fourni : une feuille de papier millimétré.

Les trois exercices sont indépendants.

Les qualités de clarté et de lisibilité de la copie, la rigueur et la concision des justifications et des calculs, seront valorisés.

EXERCICE 1 : ANALYSE.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x^2} = \exp(-x^2)$, où exp désigne la fonction exponentielle.

1°) Etude d'une fonction :

Etudier la fonction f .
Préciser les points d'inflexion de sa courbe représentative (C) .
Tracer, dans un repère orthonormé (unité 4 cm) , la courbe (C) et la droite d'équation (y = x).

2°) Etude d'une équation :

Montrer que l'équation ($f(x) = x$) admet dans $\mathbb{R}$ une solution et une seule, notée a ;
Pour cela, on étudiera, sur $\mathbb{R}+$, le sens de variation de la fonction g, où g = f - id, c'est à dire : $\forall\ x \geq 0,\ g(x) = f(x) - x$.
Vérifier que : $0,6 < a < 0,7$.

3°) Etude d'une suite:

On définit une suite u par son premier terme : $u_0 = 0,6$
et la relation de récurrence : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que, SI u_n tend vers une limite l, alors : l = a.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $0,6 \leq u_n \leq 0,7$.

c) Représenter graphiquement les premiers termes de la suite u .

d) Majorer $|f'|$ sur l'intervalle [0,6 ; 0,7] .
En déduire que, pour tout naturel n, on a : $|u_{n+1} - a| \leq 0,86 . |u_n - a|$

puis que : $|u_n - a| \leq 0,1 . 0,86^n$.

e) Etudier la convergence de la suite u .

4°) Calcul approché de la limite:

a) Déterminer un rang N1 à partir duquel u_n, pour $n \geq N1$, est une valeur approchée de a, à 0,001 près.
Donner la valeur de u_{N1} fournie par la calculatrice.

b) Ecrire, en turbo-Pascal, un programme qui
- déclare la fonction f,
- calcule les N premiers termes de la suite u (pour une valeur de N laissée au choix de l'utilisateur),
- affiche la valeur approchée de a ainsi obtenue.

5°) Accélération de la convergence vers a:

Soit v la suite définie par son premier terme : $v_0 = 0,6$
et la relation de récurrence : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = h(v_n)$,
avec h la fonction $h = k.g + id$,
où k est une constante positive donnée et égale à : $\dfrac{-2}{g'(0,6) + g'(0,7)}$.

Ainsi, $v_{n+1} = k.\ g(v_n) + v_n$,
et, puisque $g(x) = f(x) - x$, on a : $h(x) = k\ .\ (\ f(x) - x\ ) + x$
$= k\ .\ f(x) + (\ 1 - k\ )\ .\ x$.

a) Montrer que, SI v_n tend vers une limite l, alors : $l = a$.

b) Déduire du signe de h" les variations de h' sur [0,6 ; 0,7].
En déduire que : $\forall\, x \in [\ 0,6\ ;\ 0,7\ ],\ |\ h'(x)\ | \leq 0,0056$.

c) Montrer que : $\forall\, x \in [\ 0,6\ ;\ 0,7\ ],\ h(x) \in [\ 0,6\ ;\ 0,7\ ]$.

d) Montrer que, pour tout naturel n, $|v_n - a| \leq 0,1\ .\ 0,0056^n$.

En déduire un rang N2 à partir duquel v_n, pour $n \geq N2$, est une valeur approchée de a à 0,000 001 près.
Donner la valeur de v_{N2} fournie par la calculatrice.

6°) Convergence et valeur d'une intégrale impropre:

a) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx$ est une intégrale impropre convergente :

Pour cela, on pourra remarquer que : pour $u \geq 0$, $\exp(u) \geq u$,
et ainsi majorer $\exp(-x^2)$ pour $|x|$ suffisamment grande.

b) On rappelle que la densité Φ de la loi normale centrée réduite est donnée par :
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\ \exp\left(-\frac{1}{2}\ .\ x^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\ e^{-\frac{1}{2}.x^2}$$

A l'aide d'un changement de variables, calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx$.

A SUIVRE

EXERCICE 2 : CALCUL MATRICIEL.

Le BUT de l'exercice est de calculer la puissance n-ième de la matrice A, où A est donnée par

$$A = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,9 \\ 0,7 & 0,1 \end{bmatrix}.$$

Soit, pour tout entier n, une variable aléatoire réelle X_n définie sur un espace probabilisé .

On suppose que, pour tout entier naturel n :

- X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p_n ,
- les probabilités conditionnelles suivantes sont constantes :

$$P(X_{n+1} = 1 / X_n = 1) = 0,3 \text{ , si } P(X_n = 1) \neq 0 ,$$
$$P(X_{n+1} = 1 / X_n = 0) = 0,9 \text{ , si } P(X_n = 0) \neq 0 .$$

1°) Montrer que, si $0 < p_n < 1$, on a :

$$\begin{bmatrix} p_{n+1} \\ 1-p_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,9 \\ 0,7 & 0,1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} p_n \\ 1-p_n \end{bmatrix}.$$

Vérifier cette formule pour $0 \leq p_n \leq 1$.

2°) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n , puis p_n en fonction de n et de p_0

3°) Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{bmatrix} p_n \\ 1-p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,9 \\ 0,7 & 0,1 \end{bmatrix}^n . \begin{bmatrix} p_0 \\ 1-p_0 \end{bmatrix}.$$

4°) En considérant successivement les cas $p_0 = 1$, puis $p_0 = 0$, calculer les coefficients de la matrice A^n.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 3 : PROBABILITES .

On considère une urne de taille N (N > 1), contenant r boules blanches et N - r boules noires (0 < r < N).

Dans cette urne, on prélève les boules une à une et SANS remise, jusqu'à l'obtention de TOUTES les boules blanches, et on note X le nombre de tirages qu'il est nécessaire d'effectuer pour cela.

Le but de l'exercice est de déterminer
- la LOI de X (c'est à dire la loi du "temps d'attente de la r-ième boule blanche"),
- l'ESPERANCE et la VARIANCE de X .

1°) a) Traiter le cas : N = 4 et r = 1 .
b) Traiter le cas : N = 4 et r = 2 .

2°) Dans le cas r = 1 (N quelconque dans $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$), reconnaitre la loi de X et rappeler son espérance et sa variance .

3°) Etude du cas général : (1 < r < N)

a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X .
b) Soit k l'une de ces valeurs :
Déterminer la probabilité pour qu'au cours des k-1 premiers tirages soient apparues r-1 boules blanches (et donc, k-r boules noires) .
En déduire la valeur de P(X = k), c'est à dire la probabilité pour que la r_ième (et dernière) boule blanche apparaisse au k_ième tirage .

c) Vérifier, après simplifications, que $P(X=k) = \dfrac{\binom{r-1}{k-1}}{\binom{r}{N}}$,

où la notation $\binom{p}{n}$ désigne le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments, avec : $\binom{p}{n} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

En déduire les valeurs des sommes : $\sum_{k=r}^{N} \binom{r-1}{k-1}$, puis $\sum_{k=r}^{N} \binom{r}{k}$ et $\sum_{k=r}^{N} \binom{r+1}{k+1}$.

d) On rappelle que : $n.\binom{p-1}{n-1} = p.\binom{p}{n}$. En déduire que $E(X) = \dfrac{r.(N+1)}{r+1}$.

e) De même, calculer E(X.(X+1)), et en déduire V(X).

FIN

****